量子ホール系のプラトー間転移
―グローバルな対称性による考察―

広島大学 工学部　谷口 伸彦

1 はじめに

2次元電子系に強磁場をかけると、ホール伝導度が e^2/h の整数倍または分数倍に正確に量子化される(量子ホール効果)。このことは絶対零度において、外部パラメータ(=磁場の強さや不規則性の大きさ)を変化させると、数多くの基底状態が存在し、これらの量子ホール状態間を遷移する数多くの量子相転移(プラトー間転移、量子ホール転移と呼ばれる)が存在することを意味する。[1]。

本研究では、グローバルな相図に存在する近似的な離散対称性を利用し、量子ホール系のプラトー間転移を考察することを目的とする[1]。以下では、スピン自由度が無視できるスピン分極した状態のみを考え、スピン自由度の効果は考慮しない事にする。

これまで蓄積されてきた実験結果[2]や数値計算の結果[3]をまとめると、以下のようになる。

1. 観測されている相転移は2次的な量子相転移。
2. 整数量子ホールプラトー間でも、分数量子ホールプラトー間でも、相転移の臨界指数は同じ値であり、“超普遍的”である。
3. 転移点における抵抗 ρ^c_{xx} やコンダクタンスの値 σ^c_{xx} には、ある種の規則性がある。例えば、$\sigma^c_{xx}(1\to 0)\approx\sigma^c_{xx}(2\to 1)\approx 0.5$, $\rho^c_{xx}(1\to 0)\approx\rho^c_{xx}(\frac{1}{3}\to 0)\approx 1.0$ といった関係が存在する[2]。
4. 実験で観測されている臨界指数は $\kappa=1/\nu z\approx 0.42$–$0.48$ 程度で、動的臨界指数 z は $z\approx 1$ 。つまり臨界指数 ν は $\nu\approx 2.1$–2.4 である。
5. 数値計算は、電子間相互作用のない乱れた電子系に関して行なわれており、結果は $\nu=2.35\pm 0.05$ および irrelevant 方向のスケーリング指数 $y_{\rm irr}=0.38$ を与える。ただし電子間相互作用がないので $z=2$ である。ν の値は実験値と誤差の範囲内で一致するが、z の値は異なる。

[1]量子ホール系では、(乱れた) Wigner 結晶への相転移もあるが、本研究 では考慮しない。
[2]以下、コンダクタンスは e^2/h を単位として無次元量で表す。

2　2パラメータスケーリング理論と対応則

量子ホール系のプラトー間転移に関しては、観測されている多くの現象に対して、系統的な理解と解析手段を与える、2つの相補的な考え方がある。1つが、整数量子ホール効果を考察する際に導入された2パラメータスケーリング理論であり、他方はKivelson-Lee-Zhangらにより強調された、対応則と呼ばれる相図の近似的離散対称性である。以下では、これらの2つの概念が正しいと仮定し、その帰結を考えることにする。

2パラメータスケーリング理論 [4, 5] によると、繰り込み群 (RG) のベータ関数は $(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ の関数であり、その様子は図1のようになる。複素化された無次元コンダクタンス $\tau = \sigma_{xy} + i\sigma_{xx}$ を定義し、$(\sigma_{xy}, \sigma_{xx})$ の代わりに $(\tau, \overline{\tau})$ の2パラメータを使い ($\overline{\tau}$ は τ の複素共役)、複素化したベータ関数 $\beta(\tau, \overline{\tau})$ を次式で定義する。

$$\beta(\tau,\overline{\tau}) \equiv \frac{d\tau}{d\ln L} = \frac{d\sigma_{xy}}{d\ln L} + i\frac{d\sigma_{xx}}{d\ln L}, \tag{1}$$

量子相転移近傍の臨界現象は、転移点 (例えば $\tau_c \equiv (1+i)/2$) の近傍におけるベータ関数の振る舞いから決定される。実際、臨界指数 ν と y_{irr} は次式により決まる。

$$\beta(\tau,\overline{\tau}) \approx \nu^{-1}\mathrm{Re}\,\delta\tau - i\,y_{\mathrm{irr}}\,\mathrm{Im}\,\delta\tau + \cdots. \tag{2}$$

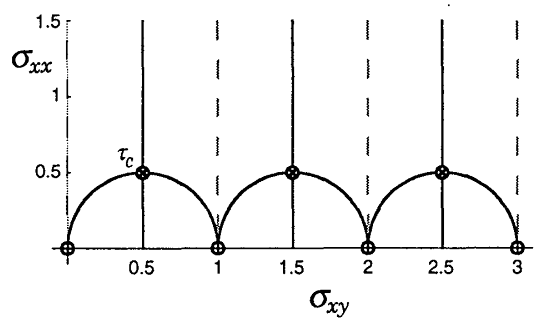
Pruiskenは、トポロジー項を含む非線形シグマ模型においてインスタントンの寄与を考慮することにより、ベータ関数を $\mathrm{Im}\tau = \sigma_{xx} \gg 1$ の領域において求めた。その結果は次の通りである (C, D は定数)。

$$\beta(\tau,\overline{\tau}) \approx -\frac{i/2\pi^2}{\mathrm{Im}\,\tau} - \frac{i\,C}{(\mathrm{Im}\,\tau)^3} - iD\,(\mathrm{Im}\,\tau)^n\,e^{-2i\pi\overline{\tau}}, \tag{3}$$

他方、観測されている量子ホール状態の階層構造と、その間に起こる相転移の超普遍性を説明するために、相図における離散対称性の存在の重要性が指摘されてきた [6]。特に、Kivelson-Lee-Zhangは、複合粒子描像における (1) 偶数磁束の付加、(2)Landau準位のシフト、という2つの (離散的) 対称変換を、相図における状態間の対応則と考え、磁場と不規則性を変化させた時の相図として図2を得た。τ で考えると、この2つの対応則は、$SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元 $T : \tau \to \tau + 1$、および $S : \tau \to -1/\tau$ と次のように関係する [6]。

$$T:\ \tau \to \tau + 1\ (\text{Landau準位のシフト})\,; \quad ST^2S:\ \tfrac{1}{\tau} \to \tfrac{1}{\tau} - 2\ (\text{偶数磁束の付加}).$$

つまり対応則が示唆する (理想的な) グローバル対称性とは、T と ST^2S によって生成される $SL(2,\mathbb{Z})$ の無次元部分群のことであり、この部分群は、数学において、$\Gamma_0(2)$ と呼ばれる [7]。



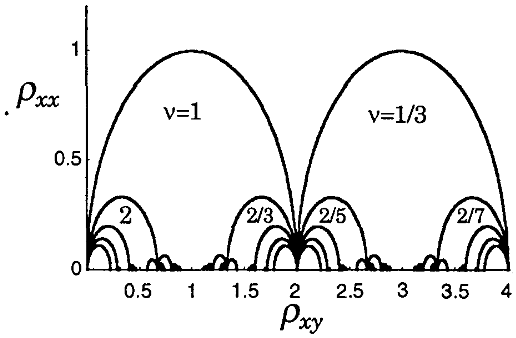


図 1: (左) 整数量子ホール効果の 2 パラメータスケーリングの RG flows の様子。⊗ は転移点、⊕ は安定相 (量子ホール状態と量子ホール絶縁体) を表す。

図 2: (右)Kivelson-Lee-Zhang によるグローバルな相図。横軸 ρ_{xy} は磁場、縦軸 ρ_{xx} は不純物に対応する。

3　$\Gamma_0(2)$-対称性的な RG flows

対応則による離散対称性が厳密に成立すると考えると、整数量子ホール効果の RG flows((図 1) を $\Gamma_0(2)$-対称化することにより、分数量子効果と整数量子効果の両方を統一的に記述する繰り込み群の様子を描くことができる (図 3)[8]。整数量子ホール効果の相転移点は $\tau_c = (1+i)/2$ であったので、等価な点 $\gamma\tau_c$(但し $\gamma \in \Gamma_0(2)$) はすべて相転移点になる。図 3 が示す RG flows は、最近の実験 [9] で観測されている双対性や半円則をも自然に説明する。

具体的に、ベータ関数が変換 $\gamma = \binom{a\,b}{c\,d} \in \Gamma_0(2)$, により "不変である" ということは、次の関係を満たすことを意味する [10]。

$$\beta(\gamma\tau, \gamma\overline{\tau}) = \frac{d(\gamma\tau)}{d\ln L} = (c\tau + d)^{-2}\beta(\tau, \overline{\tau}). \tag{4}$$

一般に $SL(2, \mathbb{Z})$ の部分群に対して、上記の性質を持つ関数を重さ $(-2, 0)$ の保型関数と呼ぶ。つまり、Kivelson-Lee-Zhang の対応則が成立するとの仮定の元では、量子ホール系の繰り込み群のベータ関数を求める問題は、式 (3) で与えられる $\tau \to +\infty$ の挙動を持ち、$\tau \approx \tau_c$ のまわりで式 (2) と振舞う、$\Gamma_0(2)$ の重さ $(-2, 0)$ の保型関数を求める問題に帰すことができる。

4　量子ホール系の非摂動的なベータ関数

興味深いことに、上述した量子ホール系のベータ関数は、最近素粒子の分野で活発に研究されている $N = 2$ 超対称 Yang-Mills 理論における非摂動的な取り扱い (Seiberg-Witten 理論) と関係する。これは、この理論の低エネルギー領域に存在する離散対称性が、$\Gamma_0(2)$ そのものであるためである。Seiberg-Witten 理論におい

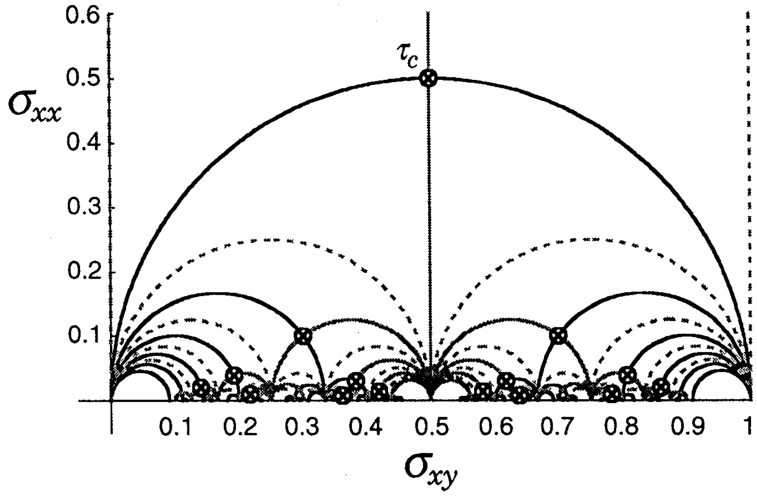


図 3: $\Gamma_0(2)$ 対称化した2パラメータスケーリング理論の RG flows の様子。$\otimes$ は相転移点。

ては、$N=2$ 超対称という非常に強い性質の帰結として、ベータ関数は τ の正則関数となる。この場合、繰り込み群関数は $\Gamma_0(2)$ という離散対称性と $\tau\to+i\infty$ の漸近形だけでほぼ決定してしまう。一方、量子ホール系については、このような $N=2$ 超対称は存在しないので、式 (3) から明らかなように、ベータ関数は正則関数とは限らない。しかし、式 (2,3,4) を満たす関数は十分特殊なものと考えられる。

以上の条件を満たす関数を具体的に求めるため、特にベータ関数に陽に $\mathrm{Im}\tau$ が現れないものを考え、次の形を仮定する。

$$\beta(\tau,\overline{\tau})=\frac{-i}{2\pi^2}\cdot\frac{\overline{\phi}_0}{(\phi_1+A\phi_0)\left(\overline{\phi}_1-A\overline{\phi}_0\right)}\cdot\frac{\mathcal{P}(f,\overline{f})}{\mathcal{Q}(f,\overline{f})},\tag{5}$$

ここで、関数 $f(\tau)=-\vartheta_3^4(0|\tau)\vartheta_4^4(0|\tau)/\vartheta_2^8(0|\tau)$ は $\Gamma_0(2)$ の元で不変である。$\phi_{0,1}$ は、重さ $(2,0)$ の保型関数で次式で定義される。

$$\phi_0(\tau,\overline{\tau})\equiv\frac{1}{\mathrm{Im}\,\tau}+16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,e^{2in\pi\tau}}{1-e^{4in\pi\tau}}\ ;\quad \phi_1(\tau)\equiv 1+24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,e^{2in\pi\tau}}{1+e^{2in\pi\tau}}\tag{6}$$

$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は $\tau\to+i\infty$ で $\mathcal{P}/\mathcal{Q}\to1$ を満たす多項式であり、その具体形は

$$\mathcal{P}(f,\overline{f})=f+\overline{f}+\frac{2(f-\overline{f})}{\pi A}-\frac{1}{2}\ ;\quad \mathcal{Q}(f,\overline{f})=f+\overline{f}+\frac{2(f-\overline{f})}{\pi A}.\tag{7}$$

である。$\phi_{0,1}$ は、保型性より $\tau=\tau_c$ で零点を持つので、式 (2) の挙動と一致するためには、この零点を $\mathcal{P}/\mathcal{Q}$ の零点によって取り除いてやらねばならない。これより $A=2c_0/\pi\sqrt{1+c_0^2}$ (ただし $c_0=\Gamma^8(1/4)/64\pi^4$) と選ぶ必要があることがわかる。$\tau\approx\tau_c$ の周りでの $\beta(\tau,\overline{\tau})$ の挙動を調べることにより

$$\nu=\frac{4\pi c_0}{(1+c_0)\sqrt{1+c_0^2}}\approx 2.12;\quad y_{\mathrm{irr}}=\frac{(c_0-1)\sqrt{1+c_0^2}}{4\pi c_0}\approx 0.31.\tag{8}$$

という実験の観測値と誤差の範囲内で一致する値を得る。

5 結び

本研究では、相図における離散対称性を利用することにより、非摂動的なベータ関数を具体的に求める試みを行なった。式(5)で与えられるベータ関数が式(2,3,4)の性質を満たすことを直接示すことができ、また得られる臨界指数も妥当なものと考えられる。しかし、この関数形が一意性的に決まるのか、また更に条件を課さねばならないかなど、今後解決すべき問題も多い。

参考文献

[1] N. Taniguchi, `cond-mat/9810334`.

[2] H. P. Wei, D. C. Tsui, M. A. Paalanen, and A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 1294; S. Koch, R. Haug, K. V. Klitzing, and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **67** (1988), 883.

[3] B. Huckestein, Rev. Mod. Phys. **67** (1995), 357; D.-H. Lee, Z. Wang, and S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **70** (1993), 4130.

[4] D. E. Khmelnitskii, JETP Lett. **38** (1983), 552.

[5] A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. B **31** (1985), 416.

[6] A. Shapere and F. Wilczek, Nucl. Phys. **B320** (1989), 669; C. A. Lütken and G. G. Ross, Phys. Rev. B **45** (1992), 11837; S. Kivelson, D.-H. Lee, and S.-C. Zhang, Phys. Rev. B **46** (1992), 2223.

[7] N. Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, (Springer-Verlag, New York, 1984).

[8] C. A. Lütken and G. G. Ross, Phys. Rev. B **48** (1993), 2500.

[9] D. Shahar *et al.*, Science **274** (1996), 589; I. Ruzin and S. Feng, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 154; M. Hilke *et al.*, Nature **395** (1998), 675.

[10] C. P. Burgess and C. A. Lütken, Nucl. Phys. B **500** (1997), 367.